	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ***ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ*** ***ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2007*** ***Α΄ - Β΄ - Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ*** *Ημερομηνία: 10/11/07*

Προτεινόμενες Λύσεις

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ Α1

Οι αριθμοί x,ψ,z και ω έχουν την ιδιότητα: Αν προσθέσουμε τρεις οποιουσδήποτε από αυτούς και από το άθροισμα που θα προκύψει αφαιρέσουμε τον αριθμό 6 προκύπτει πάντοτε ο αριθμός 2007. Να υπολογίσετε το άθροισμα x+ψ+z+ω.

ΛΥΣΗ:

$$\begin{array}{r} x + \psi + z - 6 = 2007 \\ x + \psi + \omega - 6 = 2007 \\ \psi + z + \omega - 6 = 2007 \\ z + \omega + x - 6 = 2007 \\ \hline 3(x + \psi + z + \omega) - 24 = 8028 \end{array} \; +$$

$$\Rightarrow x+\psi+z+\omega = \frac{8028+24}{3} = \frac{8052}{3} = 2684$$

ΑΣΚΗΣΗ Α2

Σε μία διοργάνωση σκακιού μέσω διαδικτύου συμμετείχαν 1119 αγόρια και κορίτσια.
Το πρώτο κορίτσι έπαιξε με 20 αγόρια, το δεύτερο κορίτσι έπαιξε με 21 αγόρια, το τρίτο κορίτσι έπαιξε με 22 αγόρια κ.ο.κ. μέχρι το τελευταίο κορίτσι που έπαιξε με όλα τα αγόρια.
Να βρείτε πόσα ήταν τα αγόρια και πόσα τα κορίτσια.

ΛΥΣΗ:

Αν ν ο αριθμός των κοριτσιών τότε:
Το $1^{ο}$ κορίτσι έπαιξε με 20 αγόρια.
Το $2^{ο}$ κορίτσι έπαιξε με 21 = 20 + 1 αγόρια.
Το $3^{ο}$ κορίτσι έπαιξε με 22 = 20 + 2 αγόρια.
...
Το $ν^{οστό}$ κορίτσι έπαιξε με 20 + (ν – 1) = ν + 19 αγόρια.

Άρα ν + ν + 19 = 1119 δηλαδή ν = 550 και τελικά έχουμε 550 κορίτσια και 569 αγόρια.

ΑΣΚΗΣΗ Α3

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A = \frac{x(x+1)}{2}$, $B = \frac{x(x-1)}{2}$ και $Γ=x^3$. Να δείξετε ότι:

(α) $A^2 - B^2 = \Gamma$ **(β)** $1^3+2^3+3^3+...+\nu^3=\dfrac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}, \quad \nu \in N$.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

(α) $A^2 - B^2 = \dfrac{x^2(x+1)^2}{4} - \dfrac{x^2(x-1)^2}{4} = \dfrac{x^2\left[(x+1)^2-(x-1)^2\right]}{4}\,\dfrac{x^2(x+\cancel{1}+x-\cancel{1})(\cancel{x}+1-\cancel{x}+1)}{4}$

$= \dfrac{x^2\,\cancel{2}x\cdot\cancel{2}}{\cancel{4}} = x^3 = \Gamma$

(β) Χρησιμοποιώντας το (α) έχουμε:

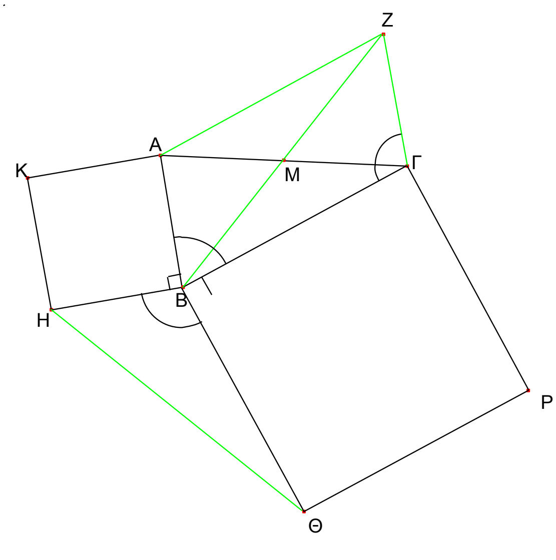
$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + \nu^3 =$

$$\left(\cancel{\frac{1^2\cdot 2^2}{4}}-\frac{1^2\cdot 0^2}{4}\right)+\left(\cancel{\frac{2^2\cdot 3^2}{4}}-\cancel{\frac{2^2\cdot 1^2}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{3^2\cdot 4^2}{4}}-\cancel{\frac{3^2\cdot 2^2}{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}-\cancel{\frac{\nu^2(\nu-1)^2}{4}}\right)=\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ Α4</u>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΒΜ η διάμεσος του. Σχηματίζουμε δύο τετράγωνα εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΗΚ και ΒΓΡΘ, να δείξετε ότι (ΗΘ)=2(ΒΜ).

<u>ΛΥΣΗ:</u>



Προεκτείνω τη ΒΜ κατά ίσο τμήμα προς το μέρος του Μ και σχηματίζω έτσι παραλληλόγραμμο ΑΖΓΒ.
Συγκρίνω τα τρίγωνα ΗΒΜ και ΖΒΓ
ΖΓ = ΗΒ (ΖΓ=ΑΒ=ΗΒ), ΒΓ = ΒΘ (ΒΓΡΘ τετράγωνο)

$Z\hat{\Gamma}B + A\hat{B}\Gamma = 180°$

$H\hat{B}\Theta = 360° - (90° + 90° + A\hat{B}\Gamma) \Rightarrow H\hat{B}\Theta = 360° - (90° + 90° + 180° - Z\hat{\Gamma}B) \Rightarrow H\hat{B}\Theta = Z\hat{\Gamma}B$

άρα $\overset{\Delta}{HBM} = \overset{\Delta}{ZB\Gamma} \quad \Rightarrow H\Theta = BZ \quad \Rightarrow (H\Theta) = 2(BM)$

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ Β1

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A=\frac{x(x+1)}{2}$, $B=\frac{x(x-1)}{2}$ και $\Gamma=x^3$. Να δείξετε ότι:

(α) $A^2 - B^2 = \Gamma$ **(β)** $1^3+2^3+3^3+...+\nu^3=\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}$, $\nu \in N$.

ΛΥΣΗ:

(α) $A^2-B^2=\frac{x^2(x+1)^2}{4}-\frac{x^2(x-1)^2}{4}=\frac{x^2\left[(x+1)^2-(x-1)^2\right]}{4}\frac{x^2(x+\cancel{1}+x-\cancel{1})(\cancel{x}+1-\cancel{x}+1)}{4}$

$=\frac{x^2\cancel{2}x\cdot\cancel{2}}{\cancel{4}}=x^3=\Gamma$

(β) Χρησιμοποιώντας το (α) έχουμε:

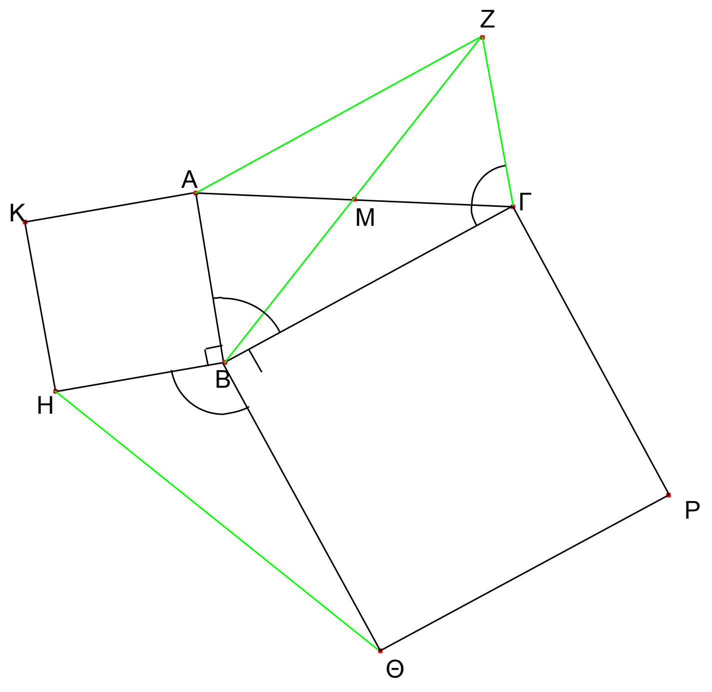
$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + \nu^3 =$

$$\left(\cancel{\frac{1^2\cdot 2^2}{4}}-\frac{1^2\cdot 0^2}{4}\right)+\left(\cancel{\frac{2^2\cdot 3^2}{4}}-\cancel{\frac{2^2\cdot 1^2}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{3^2\cdot 4^2}{4}}-\cancel{\frac{3^2\cdot 2^2}{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}-\cancel{\frac{\nu^2(\nu-1)^2}{4}}\right)=\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΒΜ η διάμεσος του. Σχηματίζουμε δύο τετράγωνα εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΗΚ και ΒΓΡΘ, να δείξετε ότι (ΗΘ)=2(ΒΜ).

ΛΥΣΗ:



Προεκτείνω τη ΒΜ κατά ίσο τμήμα προς το μέρος του Μ και σχηματίζω έτσι παραλληλόγραμμο ΑΖΓΒ.
Συγκρίνω τα τρίγωνα ΗΒΜ και ΖΒΓ
ΖΓ = ΗΒ (ΖΓ=ΑΒ=ΗΒ), ΒΓ = ΒΘ (ΒΓΡΘ τετράγωνο)

$Z\hat{\Gamma}B + A\hat{B}\Gamma = 180°$

$H\hat{B}\Theta = 360° - (90° + 90° + A\hat{B}\Gamma) \Rightarrow H\hat{B}\Theta = 360° - (90° + 90° + 180° - Z\hat{\Gamma}B) \Rightarrow H\hat{B}\Theta = Z\hat{\Gamma}B$

άρα $\overset{\Delta}{HBM} = \overset{\Delta}{ZB\Gamma} \quad \Rightarrow H\Theta = BZ \quad \Rightarrow (H\Theta) = 2(BM)$

ΑΣΚΗΣΗ Β3

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 - 5x + \kappa = 0$ και $x^2 - 7x + 2\kappa = 0$. Να βρεθούν οι τιμές του κ για τις οποίες η μία ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 7x + 2\kappa = 0$ να είναι διπλάσια της μίας ρίζας της $x^2 - 5x + \kappa = 0$

ΛΥΣΗ:

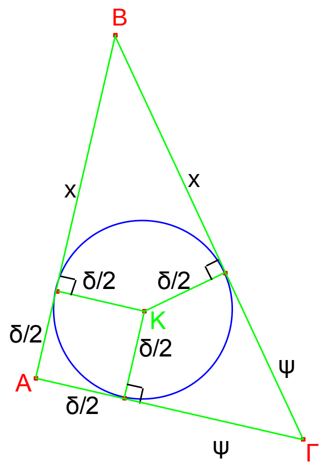
Αν ρ λύση της $x^2 - 5x + \kappa = 0$ και 2ρ λύση της $x^2 - 7x + 2\kappa = 0$ τότε:

$$\begin{matrix} \rho^2 - 5\rho + \kappa = 0 \\ 4\rho^2 - 14\rho + 2\kappa = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} -2\rho^2 + 10\rho - 2\kappa = 0 \\ 4\rho^2 - 14\rho + 2\kappa = 0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow -2\rho^2 - 4\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\rho(\rho - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = 0 \text{ ή } \rho = 2 \quad \Rightarrow \quad \kappa = 0 \text{ ή } \kappa = 6.$$

ΑΣΚΗΣΗ Β4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$. Αν δ είναι το μήκος της διαμέτρου του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ να δείξετε ότι (ΑΒ)+(ΑΓ)=(ΒΓ)+δ.



ΛΥΣΗ:

ψ = (ΑΓ) – δ/2
x = (ΑΒ) – δ/2
___________ +

(ΒΓ) = (ΑΓ) + (ΑΒ) – δ/2 – δ/2, (ΒΓ) = (ΑΓ) + (ΑΒ) – δ, (ΒΓ) + δ = (ΑΓ) + (ΑΒ)

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ Γ1

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2-5x+\kappa=0$ και $x^2-7x+2\kappa=0$. Να βρεθούν οι τιμές του κ για τις οποίες η μία ρίζα της εξίσωσης $x^2-7x+2\kappa=0$ να είναι διπλάσια της μίας ρίζας της $x^2-5x+\kappa=0$

ΛΥΣΗ:

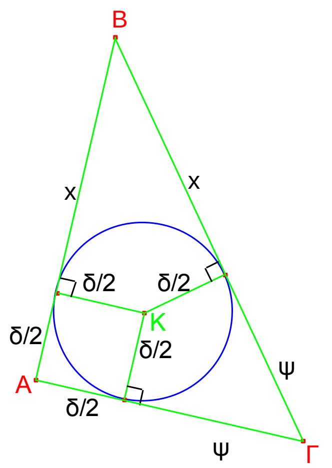
Αν ρ λύση της $x^2-5x+\kappa=0$ και 2ρ λύση της $x^2-7x+2\kappa=0$ τότε:

$$\begin{matrix} \rho^2-5\rho+\kappa=0 \\ 4\rho^2-14\rho+2\kappa=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -2\rho^2+10\rho-2\kappa=0 \\ 4\rho^2-14\rho+2\kappa=0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow -2\rho^2-4\rho=0 \Rightarrow 2\rho(\rho-2)=0 \Rightarrow \rho=0 \text{ ή } \rho=2 \Rightarrow \kappa=0 \text{ ή } \kappa=6.$$

ΑΣΚΗΣΗ Γ2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90°$. Αν δ είναι το μήκος της διαμέτρου του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ να δείξετε ότι (ΑΒ)+(ΑΓ)=(ΒΓ)+δ.



ΛΥΣΗ:

ψ = (ΑΓ) – δ/2
x = (ΑΒ) – δ/2
___________ +

(ΒΓ) = (ΑΓ) + (ΑΒ) – δ/2 – δ/2, (ΒΓ) = (ΑΓ) + (ΑΒ) – δ, (ΒΓ) + δ = (ΑΓ) + (ΑΒ)

ΑΣΚΗΣΗ Γ3

Δίνεται η ακολουθία των αριθμών: 49, 4489, 444889 , 44448889 , ... να δείξετε ότι οι όροι της είναι όλοι τέλεια τετράγωνα.

ΛΥΣΗ:

$$\alpha_\nu = 9+8\cdot\left(10+10^2+\ldots+10^{\nu-1}\right)+4\cdot\left(10^\nu+10^{\nu+1}+\ldots+10^{2\nu-1}\right)$$

$$=1+8+8\cdot\left(10+10^2+\ldots+10^{\nu-1}\right)+4\cdot 10^\nu\left(1+10+10^2+\ldots+10^{\nu-1}\right)$$
$$=1+8\cdot\left(1+10+10^2+\ldots+10^{\nu-1}\right)+4\cdot 10^\nu\left(1+10+10^2+\ldots+10^{\nu-1}\right)$$
$$=1+\left(8+4\cdot 10^\nu\right)\cdot\left(1+10+10^2+\ldots+10^{\nu-1}\right)$$
$$=1+4\cdot\left(2+10^\nu\right)\cdot\left(\frac{10^\nu-1}{9}\right) \quad =\frac{9+4\cdot\left(2+10^\nu\right)\cdot\left(10^\nu-1\right)}{9}$$

$$=\frac{9+8\cdot 10^\nu-8+4\cdot 10^{2\nu}-4\cdot 10^\nu}{9} \quad =\frac{9+4\cdot 10^\nu+\left(2\cdot 10^\nu\right)^\nu}{9} \quad =\left(\frac{1+2\cdot 10^\nu}{3}\right)^2$$

ΑΣΚΗΣΗ Γ4

Αν $\rho_1\neq\rho_2\neq\rho_3$ είναι οι πραγματικές ρίζες μιας τριτοβάθμιας εξίσωσης g(x)=0, να δείξετε ότι:

$$\frac{\rho_1}{g'(\rho_1)}+\frac{\rho_2}{g'(\rho_2)}+\frac{\rho_3}{g'(\rho_3)}=0\,.$$

ΛΥΣΗ:

Αφού ρ_1,ρ_2,ρ_3 ρίζες της εξίσωσης g(x)=0 $\Leftrightarrow$ $g(x)=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_1)(x-\rho_1)$ $\quad \alpha\neq 0$

$$\Rightarrow\ g'(x)=\alpha\left[(x-\rho_2)(x-\rho_3)+(x-\rho_1)(x-\rho_3)+(x-\rho_1)(x-\rho_2)\right]$$
$$\Rightarrow\ g'(\rho_1)=\alpha(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)$$
$$g'(\rho_2)=\alpha(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)$$
$$g'(\rho_3)=\alpha(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)$$
$$\frac{\rho_1}{g(\rho_1)}+\frac{\rho_2}{g'(\rho_2)}+\frac{\rho_3}{g''(\rho_3)}=\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\rho_1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)}+\frac{\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)}+\frac{\rho_1}{(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)}\right]$$

$$\text{Ε.Κ.Π.}=(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)\neq 0$$

$$=\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\rho_1(\rho_2-\rho_3)-\rho_2(\rho_1-\rho_3)+\rho_3(\rho_1-\rho_2)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)}\right]=\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\rho_1\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_2\rho_1+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1-\rho_3\rho_2}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)}\right]=0$$